



EMS

**European Mathematical
Society**

<http://www.emis.de/>

**Committee on
Mathematics Education**

**Niveaux de référence pour l'enseignement des
mathématiques en Europe**

**Reference levels in School Mathematics
Education in Europe**

Rapport international

International Report

**Rédigé par Antoine Bodin, Vinicio Villani, Rudolph
Straesser, révisé par Philippe Tilleuil**

Mars 2001

Niveaux de référence pour l'enseignement des mathématiques en Europe.....	1
Reference levels in School Mathematics Education in Europe.....	1
RAPPORT INTERNATIONAL.....	1
INTERNATIONAL REPORT	1
1. <i>Introduction.....</i>	3
2. <i>Evolution du projet : des objectifs aux résultats.....</i>	4
2.1. La notion de niveau de référence.....	5
2.2. Les présentations nationales (un bref survol).....	7
2.3. Les « questions de rêve ».....	8
2.4. Le centre de ressources.....	9
3. <i>Quelques considérations générales sur la société et sur les systèmes éducatifs.....</i>	10
3.1. L'état des systèmes d'enseignement.....	10
3.1.1. Passage général à une scolarité de masse.....	11
3.1.2. Introduction généralisée de l'informatique.....	12
3.1.3. Mobilité relativement aux offres de formation et au marché du travail.....	12
3.2. Quelques conséquences des mutations en cours.....	12
4. <i>Les spécificités de l'enseignement des mathématiques dans les pays de l'étude.....</i>	13
4.1. Description générale du contexte de l'enseignement des mathématiques.....	13
4.2. Place et importance des mathématiques dans le curriculum.....	14
4.3. Formation des enseignants.....	14
4.4. Principaux objectifs de l'enseignement des mathématiques.....	14
4.5. Exemples de sujets enseignés.....	15
5. <i>Réflexions générales sur les mathématiques et leur enseignement.....</i>	16

5.1.	Conceptions d'enseignement et d'apprentissage.....	16
5.2.	La didactique des mathématiques comme discipline scientifique.....	18
5.3.	Heuristique, preuve et démonstration.....	19
5.4.	Rapports entre les mathématiques et l'informatique.....	21
5.4.1.	La place des nouvelles technologies dans les classes et aux examens.....	22
5.4.2.	Les relations entre l'enseignement des mathématiques et l'enseignement de l'informatique.....	23
5.4.3.	L'intégration des calculatrices et des ordinateurs dans l'enseignement des mathématiques.....	24
6.	<i>Perspectives et conclusions</i>	25
7.	<i>Références</i>	25

1. Introduction

Le projet "Niveaux de référence en mathématiques en Europe, à 16 ans", tel qu'il a été proposé à la Commission Européenne (D.G.XXII), prévoit d'identifier des "niveaux de référence" concernant les savoirs et les compétences du domaine mathématique, qui puissent être communs aux pays de la Communauté Européenne et éventuellement à d'autres pays.

L'étude est conduite dans le cadre du Comité sur l'Éducation Mathématique de la Société Mathématique Européenne. Elle est faite, en partie au moins, par des mathématiciens ou par des enseignants de mathématiques aux niveaux universitaires et ayant en particulier le souci de l'avenir des formations mathématiques. Un Groupe d'experts s'est constitué comme une extension du Comité sur l'Éducation Mathématique de la Société Mathématique Européenne. Cela assure aux travaux du Groupe, à la fois une reconnaissance de la part des sociétés mathématiques nationales et des moyens de diffusion des travaux.

Le Groupe ainsi constitué autour des membres du Comité comprend des enseignants du secondaire, des chercheurs sur l'enseignement et la didactique des mathématiques, des formateurs d'enseignants, et des auteurs de programmes ou de manuels pour l'enseignement secondaire.

Dans tous les cas, les mathématiciens du groupe sont fortement motivés par ce qui concerne l'enseignement scolaire des mathématiques, ils sont bien informés de la situation de leur pays et entretiennent des liens privilégiés avec leurs associations nationales de mathématiciens et d'enseignants de mathématiques.

Le centre de coordination de l'étude s'est installé en France, à l'IREM de Besançon (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Université de Besançon) et a été placé sous la responsabilité d'Antoine BODIN, chercheur associé à l'IREM et à l'INRP (Institut National de Recherches Pédagogiques). L'IREM de Besançon a en effet une tradition ancienne de recherches sur l'évaluation en mathématiques et de participation aux études nationales (ministère français de l'Éducation) et internationales (TIMSS). C'est aussi depuis l'IREM de Besançon que s'est développé en France, depuis plus de 10 ans, un observatoire relatif à l'enseignement des mathématiques et connu sous le nom d'EVAPM. Cet observatoire est organisé par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) en collaboration avec l'INRP (Institut National de Recherches Pédagogiques), et avec l'IREM de Besançon. Les évaluations à grande échelle menées dans le cadre d'EVAPM assuraient de posséder, au moins pour le cas français, d'assez d'éléments de référence concernant les connaissances et les compétences développées chez les élèves.

Après une première réunion du Comité à Trento (Italie), trois rencontres se sont donc déroulées à Besançon, sous la présidence du Professeur Vinicio Villani, de l'Université de Pise (Italie), Président du Comité sur l'Éducation Mathématique de la Société Mathématique Européenne et responsable du projet : la première en mars 1999, la seconde en décembre de la même année, et la troisième en février 2001 (voir ci-après liste des participants).

Chacune des rencontres a duré 3 jours, a réuni entre 20 et 25 experts et a été l'occasion d'échanges intenses et fructueux. Dans les deux premiers cas, la participation du président de la Société Mathématique Européenne à ces travaux a été le signe de l'intérêt de la communauté mathématique pour l'étude entreprise. La section 2 du présent rapport comporte une synthèse des réflexions et des débats menés durant ces réunions.

Bien sûr, de nombreux éléments de réflexions existent déjà, à la suite d'enquêtes ou d'études nationales ou internationales telles que les études de l'OCDE et celles de l'IEA (TIMSS,...). Toutefois, aucune de ces études ne couvre l'ensemble des pays de la Communauté Européenne et rares sont celles qui, d'une façon ou d'une autre, concernent les élèves de 16 ans. De plus, les systèmes éducatifs évoluent rapidement et de nombreuses données recueillies au cours des 10 dernières années (et même au cours des 3 ou 4 dernières) sont soit totalement obsolètes, soit demandent à être vérifiées avant toute utilisation. D'autre part, des changements sont partout en cours et il est bien hasardeux de prétendre fournir un portrait stabilisé.

Enfin, cette étude aura naturellement permis de mettre en place un réseau européen de personnes et d'organisations intéressées par la question et dont les experts du Groupe de travail constituent les nœuds principaux.

2. Evolution du projet : des objectifs aux résultats

Le développement des échanges de tous ordres entre les différents pays de la Communauté Européenne implique que des bases communes de dialogue et de réflexion soient dégagées dans un grand nombre de domaines. L'enseignement des mathématiques est un de ces domaines. L'European Mathematical Society – avec son Comité pour l'éducation mathématique – est un partenaire naturellement concerné par le développement de tels échanges. Ces échanges, dont le besoin s'affirme de plus en plus, peuvent concerner tant des questions d'intérêt général (la place de l'éducation mathématique dans la vie du citoyen, l'impact de la modélisation mathématique sur la prise de décision, ...) que spécifiques (méthodologie de l'enseignement des mathématiques, programmes de recherches ou de formation, disciplines particulières, place de l'informatique, ...)

Le projet « Niveaux de référence en mathématique en Europe à 16 ans » s'inscrit dans un tel cadre.

Sans trop s'attarder à la situation existante, ou à d'autres réflexions en cours, le Groupe de travail aurait pu chercher à définir ce qui lui aurait semblé souhaitable ou nécessaire en termes de connaissances et de compétences pour tous les jeunes de 16 ans de la Communauté Européenne. Il aurait alors produit un bel édifice intellectuel, sans doute satisfaisant pour l'esprit, mais qui aurait eu toutes les chances de devenir virtuel, ou – pire peut-être ! – normatif.

Conscients de cette difficulté, les membres du Groupe ont précisé leur volonté de commencer l'étude par une mise à plat des aspects structuraux des divers systèmes d'enseignement des pays étudiés, en portant une attention particulière aux questions pouvant avoir une incidence sur l'enseignement des mathématiques.

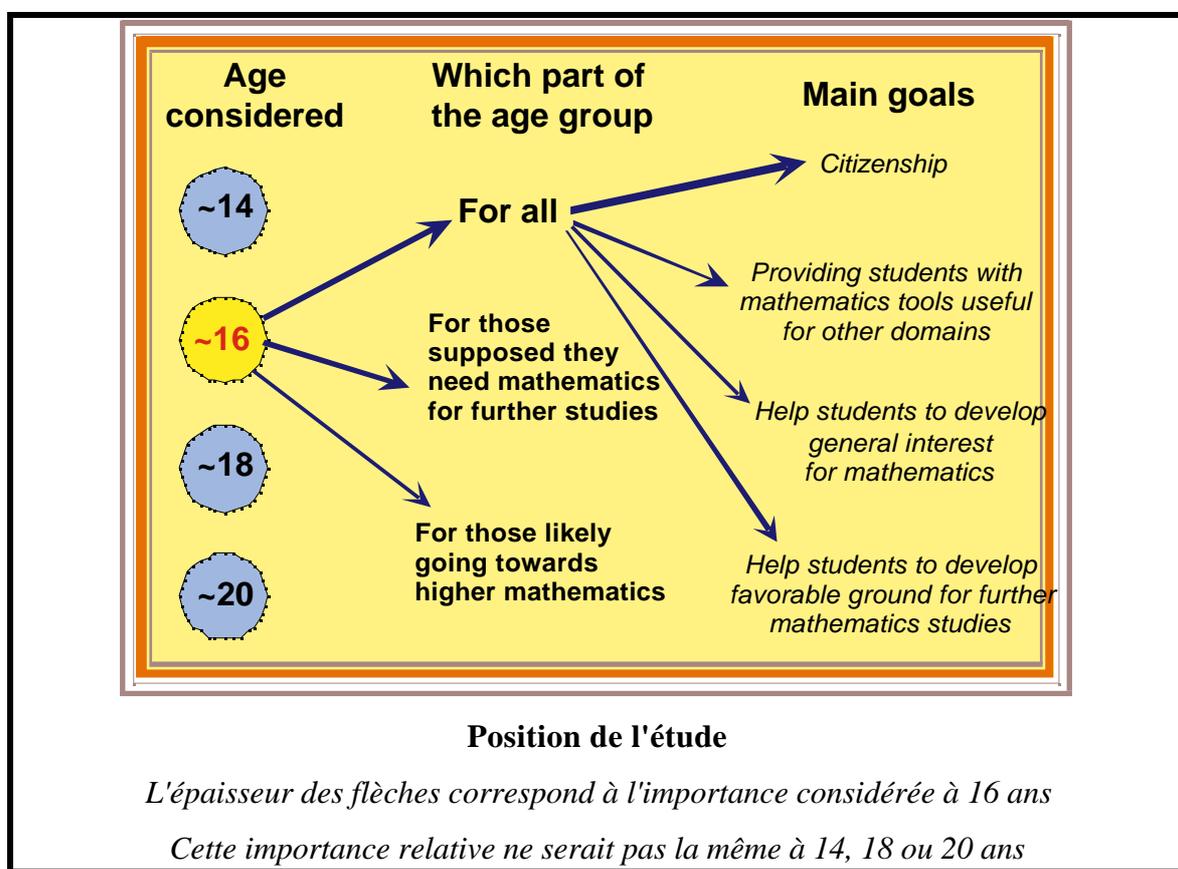
Il a donc été clairement affirmé que le projet concernait les contenus et les méthodes d'enseignement (formes d'apprentissages), mais sans avoir pour objectif de standardiser les curriculums. Le projet devait aussi permettre d'établir ou de développer des liens entre les enseignements secondaires et universitaires ou post-secondaires. En ce sens, une première classification (minimale) relativement aux connaissances et aux compétences attendues a été retenue :

Niveau 1 : pour le citoyen correctement informé (c'est-à-dire : pour tous),

Niveau 2 : pour ceux qui poursuivront des études post-secondaires.

Le niveau 2 concerne les élèves qui sont censés poursuivre des études des études qui comporteront une part de formation mathématique.

Les niveaux 2 et 3 concerne les élèves qui s'orienteront vers des études à dominante mathématique.



2.1. La notion de niveau de référence

Dans un premier temps, le Groupe de travail s'est donc particulièrement intéressé aux documents officiels (programmes d'enseignement, manuels scolaires, ..) correspondant à la tranche d'âge d'environ 16 ans. Et dans une démarche pragmatique, il a voulu commencer par faire un état des lieux. Les questions suivantes se sont alors posées :

- Comment fonctionnent, aujourd'hui, dans les pays concernés par l'étude, les systèmes d'enseignement, et plus particulièrement en ce qui concerne les mathématiques ?
- Concernant les mathématiques, quels sont les points forts et les points faibles de ces systèmes, relevés par les acteurs eux-mêmes, ou tels qu'ils ressortent d'études ou d'enquêtes nationales ou internationales ?
- Quelles sont, aujourd'hui, les attentes explicites, en mathématiques à 16 ans, dans les pays concernés, et quelles sont, en réponse à ces attentes, les connaissances et les compétences observées chez les élèves ?

Les réponses à ces questions ont permis d'arriver à une meilleure connaissance de ce qui maintenant :

- est supposé être enseigné (curriculum officiel),
- est vraiment enseigné et de quelle façon (contexte, méthodes, curriculum "réel"),
- est évalué et comment (évaluation courante ou formative, examens),
- est acquis par les élèves (curriculum atteint) en mathématiques, dans l'enseignement secondaire, à la fin de la scolarité obligatoire, et dans chacun des pays de la communauté européenne.

L'objectif fondamental du projet, à savoir **définir et mettre au point une base commune d'informations et de réflexions concernant l'enseignement des mathématiques** a ainsi commencé à se préciser.

En conséquence de cette première phase de réflexion, les membres du Groupe ont pris en charge des **présentations nationales** relatives à l'enseignement des mathématiques dans leur pays.

De plus, cette première phase a aussi permis de dégager une définition assez souple de **niveau de référence** comme **base pragmatique d'échange**, de **communication**, de **dialogue**. De manière un peu plus détaillée, la définition de niveau de référence a été entendue comme la description – que ce soit en termes généraux ou plus circonstanciés – et pour chaque pays, des matières ou du programme, de leur degré d'approfondissement (leur intervention dans la culture mathématique des élèves) et de leur mode d'appropriation (celui-ci ayant un lien étroit avec les compétences visées). On a donc tenté de cerner les matières ou compétences visées et – suivant un principe de réalité – acquises plus ou moins bien suivant les individus.

Dans un tel contexte, il ne faudrait pas qu'une acception plus vague et sujette à diverses interprétations, puisse être accolée à « niveau de référence », dans laquelle les deux termes « niveau » et « référence » recevraient une interprétation trop négative (en particulier chez les enseignants). Ces termes véhiculent en effet avec eux des problèmes techniques et didactiques complexes, et sont de plus politiquement connotés. S'agit-il de classer les personnes selon des critères définis par une instance administrative supérieure, supranationale de surcroît ? S'agit-il de contrôler, à ce niveau, les décisions prises aux niveaux locaux : par exemple les décisions d'attributions de diplômes ? S'agit-il encore de contrôler la qualité de la formation donnée dans les états membres de la communauté européenne ?

2.2. Les présentations nationales (un bref survol)

Il a été convenu que chaque présentation porterait non seulement sur l'enseignement des mathématiques à 16 ans, mais aussi sur son contexte. Il a aussi été convenu qu'il convenait de chercher à prendre en compte 100% des jeunes de cette tranche d'âge, quel que soit l'endroit où ils se trouvent dans les systèmes éducatifs considérés, et quelles que puisse être leurs études futures.

Si l'objectif principal est bien de fournir des références qui soient utiles relativement à l'âge précis de 16 ans, il ne nous a pas paru possible de limiter strictement l'étude à cet âge. En ce qui concerne l'âge, 16 ans est donc davantage un point de repère que l'âge réel pris en considération. En effet :

- Selon les pays, les élèves de 16 ans peuvent être tous, ou à peu près tous, dans la même classe-niveau (grade) : pays dans lesquels le redoublement est inconnu, telle la Suède. Ils peuvent aussi être répartis dans plusieurs classes, ou niveaux.
- Toujours selon les pays, les élèves de 16 ans peuvent se trouver pratiquement tous dans la même filière de formation ou du moins y avoir été jusqu'à l'année précédente (à 15 ans), ou bien avoir été répartis dans des filières différenciées plusieurs années plus tôt.

De toutes façons, pour dire quelque chose de pertinent pour un âge donné, il est nécessaire d'être informé sur ce qui se passe au cours des années précédentes et sur ce qui est susceptible de se passer au cours des années suivantes. La non-rencontre d'un concept ou d'un savoir donné avant l'âge de 16 ans, ne prend pas le même sens si l'on sait que l'élève a peu de chance de le rencontrer ultérieurement, ou si, au contraire il est établi qu'il le rencontrera plus tard.

Finalement, nous nous sommes principalement intéressés à savoir où sont vraiment les jeunes de 16 ans selon les pays et à ce qu'ils font en mathématiques à cet âge, qu'ils soient ou non dans la classe niveau d'âge théorique de 16 ans, lorsqu'elle existe.

En ce qui concerne les pays, l'étude ne s'est pas limitée aux seuls pays de la Communauté Européenne. Les présentations nationales relatives aux pays suivants sont disponibles (au 11 mai 2001) : **Allemagne, Belgique, Danemark, Espagne, Finlande, France, Grèce, Hongrie, Italie, Luxembourg, Pays-Bas, Pologne, Royaume-Uni, Fédération de Russie, Suède, Suisse.**

En ce qui concerne les pays, l'étude s'est donc aussi étendue à certains pays de l'Est Européen (Fédération de Russie, Pologne, Hongrie), ainsi qu'à la Suisse (intérêt réciproque). Seuls 3 des pays de Communauté Européenne sont absents de l'étude : Autriche, Irlande, Portugal.

Le plan suivant a été adopté pour chacune des présentations.

1. - Description générale du contexte dans lequel se déroule l'enseignement des mathématiques
2. - Principaux objectifs reconnus à l'enseignement des mathématiques.
3. - Contenu de base : inventaire exhaustif commenté.

4. - Exemples de modules d'enseignement (équation du second degré, théorème de Pythagore, similitude, pourcentage, ...)

5. - Autres questions intéressant l'enseignement des mathématiques (caractéristiques régionales, stratégies d'implantation, formation initiale et en cours de carrière des enseignants, ressources didactiques, ...)

La section 5 du présent rapport résume les présentations nationales. La lecture de ces rapports, fournis en annexe, permet à qui le souhaite de retrouver tous les détails qui peuvent l'intéresser.

2.3. Les « questions de rêve »

L'idée de questions de référence est associée de façon évidente à celle d'évaluation des connaissances (cf. Bodin, 2000). Le groupe de travail a cependant estimé que, avant de se préoccuper de l'évaluation proprement dite, il convenait de s'intéresser à la qualité de la formation et à faciliter la communication et la diffusion, en Europe, et dans d'autres pays, de pratiques d'enseignement des mathématiques susceptibles de favoriser cette qualité.

Le groupe s'est ainsi attaché à identifier, à produire, et à analyser, des questions mathématiques (exercices et problèmes) illustrant ce qu'il considérait comme pertinent au niveau de l'enseignement des mathématiques à des élèves de 16 ans et autour de cet âge.

Autrement dit, il s'est agi de repérer un ensemble de situations auxquelles nous souhaiterions que les élèves soient confrontés au cours de leurs études, sans pour autant avoir eu le souci de les présenter sous forme de questions prêtes à être intégrées dans une quelconque base de questions dédiée à l'évaluation.

Certaines des questions retenues sont même, typiquement, des questions d'enseignement, qu'il sera préférable d'utiliser avec des classes entières ou en travail collectif plutôt que dans des situations d'évaluation individuelle.

Pour caractériser le caractère volontariste de cette approche, qui consiste, finalement, après analyse, à présenter ce qui nous semble souhaitable, même si cela peut s'éloigner passablement des pratiques courantes observées dans tel ou tel pays ou dans telle strate des systèmes éducatifs, nous avons appelé nos questions "dream questions", ce que nous traduisons dans la version française de ce rapport par "questions de rêve".

Malgré cela, nous nous sommes efforcés de rester réalistes. Toutes les questions présentées ont été réellement utilisés avec des élèves. L'expérimentation a cependant été limitée et un travail de validation reste à faire dans ce domaine.

L'un des objectifs du projet était donc de réunir et de compléter un ensemble de questions et de problèmes, de façon à :

- a) - Pouvoir proposer une sélection de questions et de problèmes choisis pour leurs qualités d'un point de vue culturel et formatif (mettant en jeu les capacités de mathématiser, de raisonner, d'interpréter les résultats,...). Ces qualités étant explicitées et argumentées.

- b) - Distinguer parmi ces questions et problèmes, ceux qui illustrent plutôt des stratégies de formation (situations de formation) et ceux susceptibles d'être utilisés pour l'évaluation (c'est-à-dire pour repérer les acquisitions des élèves).
- c) - Mettre les matériels produits à la disposition de tous ceux qui voudront les utiliser, sans aucune prétention à vouloir ramener les curriculum mathématiques à un modèle unique.

Pour cela, outre les questions produites par notre groupe de travail, nous avons pu faire des emprunts à plusieurs études nationales et internationales.

Pour des raisons de communication, le cadre théorique d'organisation des questions relativement aux contenus concernés et aux compétences sollicitées a été partiellement emprunté à l'étude PISA menée par l'OCDE. C'est à ce cadre que nous avons rapporté un ensemble choisi de 65 questions.

Les questions de référence et le cadre théorique sont présentées dans la seconde partie de ce rapport.

Il conviendrait d'aller plus loin et de chercher à :

- c) - Fournir, pour chaque problème, une échelle illustrant les réponses possibles des élèves, la valeur de ces réponses, et, dans le cas des questions d'évaluation, sur des pourcentages de succès déjà enregistré dans divers pays. La notion de niveau de référence trouvant ici toute sa place.
- d) - Produire une documentation sur des parcours didactiques efficaces (organisation des situations de formation) pour améliorer la formation globale des élèves (et non seulement pour les préparer à résoudre les problèmes proposés dans les tests).

Cela pourrait être l'objet d'une seconde étape.

2.4. Le centre de ressources

Pour atteindre les buts définis plus haut, il était nécessaire de commencer par rassembler de l'information sur l'enseignement des mathématiques dans les pays visés par l'étude.

En relation avec le projet, s'est donc constitué, à l'IREM de Besançon, un Centre de documentation sur les curriculums mathématiques et les examens. Ce Centre, bien que modeste, est maintenant équipé pour recueillir et organiser la documentation, pour faire exécuter les traductions nécessaires, etc. Il est aussi équipé de façon à faciliter les échanges, dans un premier temps entre les experts impliqués, et, dans un second temps à un niveau plus large incluant les sociétés mathématiques nationales et les associations d'enseignants.

Les informations recueillies sont de plusieurs types :

- informations générales sur les systèmes d'enseignement et plus particulièrement en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques : curriculum officiel y compris la partie relative aux examens et à l'évaluation, manuels scolaires, épreuves d'examens et tests d'évaluation, rapports divers ;

- informations spécifiques sur les questions enseignées et sur les démarches d'enseignement ;
- documents destinés aux enseignants.

Chacun des experts nationaux a été invité à faire converger sur le Centre de ressources des informations de ce type concernant son pays. Pour cela, il devait s'adresser aux institutions officielles, aux associations d'enseignants, aux éditeurs de manuels scolaires et, éventuellement, de tests d'évaluation, ainsi qu'aux institutions ayant conduit des recherches en didactique, des projets, des évaluations,... et tous types de projets concernant l'enseignement des mathématiques.

Evidemment, un intérêt particulier a été porté aux informations concernant l'enseignement au niveau de la tranche d'âge 16 ans, mais cela sans exclusive.

Simultanément, le Centre a rassemblé des documents élaborés dans le cadre d'enquêtes et d'études internationales : TIMSS, PISA,... Il nous a paru nécessaire de tenir compte des tendances qui pouvaient être observées dans d'autres pays tels que les Etats-Unis et le Japon. À terme, il sera en effet indispensable au moins de situer nos propositions par rapport aux "Standards" développés par exemple aux États-Unis. D'autre part, rappelons l'existence d'une communauté mathématique internationale bien organisée et sensibilisée aux questions touchant à l'enseignement des mathématiques. Le Congrès International sur l'Education Mathématique (ICME), qui se réunit tous les quatre ans, n'en étant que la manifestation la plus visible. Les idées, les réflexions, et les échanges concernant l'enseignement des mathématiques ne connaissent guère les frontières et il serait à la fois dommage et difficile de s'enfermer dans une réflexion strictement européenne. De ce fait, la documentation rassemblée à Besançon ne se limite pas à la documentation issue des pays de l'étude, mais s'ouvre à d'autres sources.

3. Quelques considérations générales sur la société et sur les systèmes éducatifs

3.1. L'état des systèmes d'enseignement

Nous l'avons rappelé dès l'introduction, les changements sont partout en cours et il serait bien difficile de fournir une image stabilisée de l'état actuel des systèmes d'enseignement.

Les systèmes centralisés tendent à se décentraliser tandis que les systèmes décentralisés tendent à rechercher un pilotage davantage centralisé. Une enquête de l'OCDE montre d'ailleurs que, dans les deux cas, ces orientations correspondent aux souhaits des citoyens.

L'idée de « responsabilisation » a progressé partout, et les systèmes cherchent tous à se doter, d'une façon encore très inégale, de moyens pour évaluer les effets de leurs systèmes d'enseignement. Ceci peut être mis en rapport avec ce qui est appelé en France, « la culture de l'évaluation », effort qui englobe la question de la « responsabilisation » pour distiller la problématique de l'évaluation dans tous les plis du système. Elle concerne aussi bien

l'enseignant dans sa classe, que l'organisation des établissements, la qualité des programmes et des manuels, et même l'apprenant lui-même (auto-évaluation).

Les changements en cours se veulent être des réponses aux mutations survenues dans les dernières décennies du 20^{ème} siècle dans toutes les sociétés de tous les pays concernés par l'étude. Dans la suite, nous allons développer succinctement trois points qui intéressent particulièrement le fonctionnement des systèmes d'enseignement : il s'agit du passage généralisé à une scolarité de masse, du développement des moyens modernes d'information et de communication, et finalement, de l'ouverture de l'espace européen, et même mondial, aux étudiants et aux travailleurs.

3.1.1. Passage général à une scolarité de masse.

Désormais, dans tous les pays considérés, l'obligation scolaire s'étend au moins sur 9 années. De fait, la quasi-totalité des jeunes est scolarisée au moins jusqu'à 16 ans, et bien souvent jusqu'à 18 ans.

Toutefois, notre souci de nous intéresser à l'ensemble des jeunes de 16 ans rencontre ici, immédiatement, une première difficulté. Pour les seuls pays de la Communauté Européenne, les statistiques de l'OCDE (1996) font état, pour la moitié des pays au moins, d'une proportion de jeunes non scolarisés à 16 ans de l'ordre de 5 à 20% (Grèce, Danemark, Autriche, Finlande, Irlande, Espagne, Portugal, Suisse, Royaume-Uni).

À l'opposé, toujours selon l'OCDE, l'espérance (mathématique) de la durée de scolarisation, tous niveaux confondus, y compris le niveau universitaire, serait de l'ordre de 16 années après l'âge de 4 ans dans plus de la moitié des pays de notre étude. Ce qui ferait qu'en moyenne, à 16 ans, des jeunes peuvent très bien ne plus être scolarisés, et de ce fait échapper à notre étude, tandis que tous les autres peuvent espérer pouvoir encore profiter de 4 années de formation.

Tout cela ne peut être exprimé qu'en tendance. En effet, les choses changent rapidement, aussi bien sur le plan législatif (la fin de la scolarité obligatoire est en train de passer de 14 ou 15 ans à 16 ou 18 selon les pays) que sur le plan des pratiques. Par exemple, on observe en France que les 2/3 des jeunes ayant terminé une formation supérieure courte fournissant un diplôme poursuivent des études d'une façon ou d'une autre. Or, ces formations ont justement été conçues pour ouvrir directement sur le monde du travail. Cette tendance se retrouve, semble-t-il, dans d'autres pays, mais est évidemment liée au niveau de saturation du marché de l'emploi (variable selon les pays).

Outre cet allongement de la scolarité, la tendance générale est de retarder aussi longtemps que possible la différenciation scolaire en parcours séparés (organisation de filières). Grossièrement parlant, parmi les pays considérés, la différenciation n'intervient, dans la majorité des cas, qu'après 14 ou 15 ans. Comme pour les autres variables de contexte, la variabilité est ici aussi très importante. Pour certains pays cette différenciation a lieu à 16 ans, voire à 17 ans (sauf, rappelons-le, pour la part - faible sans doute, mais que nous devons garder à l'esprit - des jeunes qui ne sont plus scolarisés à cet âge). Dans cette catégorie se placent les pays suivants : Finlande, Danemark, Suède. Dans d'autres pays, cette différenciation s'effectue dès les 11 ou 12 ans : Allemagne, Pays-Bas, Royaume-Uni, Belgique, Suisse, Autriche (mais plusieurs de ces pays cherchent à retarder cet âge).

Rappelons que toutes ces données sont susceptibles d'être révisées pour tenir compte des évolutions en cours.

3.1.2. Introduction généralisée de l'informatique

Les nouvelles technologies de l'information et de la communication se sont imposées dans tous les domaines professionnels ou non professionnels. Elles conduisent à des attentes nouvelles en matière de formation et de compétences.

On assiste en conséquence à une demande généralisée pour que l'école procure à tous une formation informatique de base. Il s'agit là d'un nouveau savoir du type « lire, écrire, compter », dont on ne sait pas très bien s'il doit venir compléter les anciens ou s'il est appelé à s'y substituer.

Par exemple, dans certaines expérimentations menées dès le plus jeune âge et concernant l'écrit, la notion d'hypertexte tend à être prise comme référent intégrateur : c'est alors dans l'univers hypertexte que la notion de texte se dégage, et non plus d'une combinaison « texte – images – liens » que se dégagerait l'idée d'hypertexte. Ceci n'est qu'un exemple, et encore non lié directement aux mathématiques, mais on retrouve la même ambivalence dans le domaine de l'enseignement des mathématiques. Il est clair que les mathématiques professionnelles et leur pratique sont influencées par les nouvelles technologies. Il est moins évident de savoir si ces technologies doivent être mises, lorsque c'est possible, au service d'apprentissages de savoirs inchangés, ou si c'est la nature même de ces savoirs qui se trouve modifiée.

3.1.3. Mobilité relativement aux offres de formation et au marché du travail

L'ouverture de l'Espace Européen et même Mondial aux étudiants et aux travailleurs a pour conséquence une demande insistante pour que l'école ne prépare pas de façon précoce les élèves à un emploi déterminé, mais plutôt qu'elle les munisse d'une formation générale solide et d'instruments culturels leurs permettant d'effectuer les adaptations et les mises à jour qu'ils devront faire tout au long de leur vie professionnelle. Nous avons déjà signalé plus haut (cfr. 3.1.1.) que la prise en compte réelle de cette demande est rencontrée de manière très variable suivant les pays.

3.2. Quelques conséquences des mutations en cours

En conséquence de ces diverses mutations, on ne doit pas s'étonner de constater que dans la quasi-totalité des pays, des réformes importantes concernant les systèmes d'enseignement sont mises en place ou sont en projet.

Mais les dynamiques de changement comportent, pour les systèmes d'enseignement, des défis difficiles à tenir.

- Il convient d'identifier de façon univoque les connaissances et les capacités qui seront nécessaires à tous les futurs citoyens (connaissances de base ou socles de connaissances, selon les terminologies). Cette univocité est loin d'être maîtrisable à l'intérieur d'un même pays (ne serait-ce que parce que le futur, par définition, reste incertain). Cela est encore plus vrai en ce qui concerne la Communauté Européenne dans son ensemble.

- Il convient d'organiser les enseignements de façon que tous les élèves puissent acquérir ces connaissances et capacités de base, de façon consciente, durable, et utilisables non seulement en situation scolaire, mais surtout dans les situations non scolaires auxquelles ils seront confrontés par la suite.
- Il faudrait ne pas diminuer le niveau global des formations, ne serait-ce que pour éviter de pénaliser les élèves qui poursuivront leurs études au delà de la scolarité obligatoire.

En fait, la conviction que le "niveau baisse" et que les changements en cours contribuent à cette baisse est largement présente parmi les praticiens de l'enseignement des mathématiques, et cela dans la plupart des pays étudiés. L'observation et la réflexion conduisent à nuancer cette impression. Il est peut-être vrai que davantage d'élèves peuvent apprendre aujourd'hui plus de choses et mieux qu'il y a n années, que les 5% qui représentent les meilleurs de la génération actuelle peuvent avoir des compétences supérieures à celles des 5% équivalents d'il y a 10 ou 20 ans (leurs aînés), etc. mais il n'en demeure pas moins vrai que les attentes de la société semblent croître plus vite que les acquisitions des élèves.

Notre société, dit-on, est "numérique". Il n'y a pas que les images qui soient numériques ! En fait, l'information numérique est partout présente, de plus en plus complexe et cette information concerne l'ensemble des citoyens. À moins de souhaiter une société dans laquelle seule une partie des citoyens serait en mesure de comprendre le monde qui les entoure, ce n'est pas seulement la formation des futurs mathématiciens ou des futurs utilisateurs professionnels des mathématiques qui est concernée. À l'évidence, l'enjeu concerne la démocratie elle-même !

4. Les spécificités de l'enseignement des mathématiques dans les pays de l'étude

Au delà des aspects considérés jusqu'ici, que partagent au moins dans les grandes lignes tous les pays considérés, on observe aussi des différences notables entre les pays et parfois aussi, à l'intérieur d'un pays donné, entre diverses régions ou sous-systèmes d'enseignement (par exemple, en Belgique, Suisse, Espagne, Allemagne, ...).

4.1. Description générale du contexte de l'enseignement des mathématiques

Il semble que des pays entiers restent attachés à des pratiques traditionnelles d'enseignement (« - Ecoute et apprend ! »), que d'autres soient très attachés à des méthodes issues des courants dits de « pédagogie par objectifs », et que d'autres enfin, soient en train de mettre en place un style d'enseignement résolument constructiviste.

Dans ce dernier cas, les connaissances sont mises au second plan (ce qui ne signifie pas que leur soit déniée une quelconque importance), tandis que les procédures et les processus font l'objet de la plus grande attention. L'élève est appelé à construire ses connaissances, ce qui paraît quasiment ridicule à certains et peut-être comme la panacée pour d'autres.

Comme nous l'avons dit, il existe une communauté quasi universelle d'enseignants de mathématiques et l'on trouvera partout des enseignants partageant cette dernière approche, mais nous parlons ici de stratégie développée au niveau d'un système entier. Parmi ces pays, il faut citer surtout les Pays-Bas, dont l'expérience en ce domaine est certainement à suivre avec beaucoup d'attention. Dans une certaine mesure aussi, l'Italie, certains cantons de Suisse, une partie de la Belgique et le Royaume-Uni.

En France où l'approche constructiviste fait figure d'approche officielle, celle-ci commence à être décriée y compris lorsqu'elle n'a pas commencé à être vraiment appliquée. Il est vrai que le recours systématique aux activités ne suffit pas à qualifier de constructiviste une démarche d'enseignement.

4.2. Place et importance des mathématiques dans le curriculum

La place relative des mathématiques est importante dans la plupart des curriculums. Le temps scolaire consacré aux mathématiques est de l'ordre de 10 à 12% du temps total. Mais comme ce temps total est lui-même variable d'un pays à l'autre, cela laisse place pour des disparités importantes. À 16 ans, le temps moyen d'enseignement des mathématiques varie de 2h 15min (3 périodes de 45 minutes) à 3h 45 min (5 périodes de 45 minutes), sans qu'il soit possible d'être beaucoup plus précis pour l'instant.

Signalons aussi que l'horaire alloué aux mathématiques semble être en baisse relative, sous l'effet d'un rééquilibrage avec d'autres disciplines et en particulier l'informatique. Dans le même temps, selon une enquête de l'OCDE, dans la plupart des pays, les mathématiques sont considérées comme la discipline la plus importante, après la langue maternelle. Les Pays-Bas font exception, où l'importance des mathématiques vient après celles de l'informatique et de la seconde langue. À noter que les États-Unis font exception dans l'autre sens : les mathématiques sont la discipline désignée comme la plus importante de toutes, et cela massivement. Ajoutons, ce qui n'est peut-être pas tout à fait étranger à notre propos, que les États-Unis, dont on sait que les résultats d'ensemble en mathématiques sont très faibles (du moins à l'aune des études internationales) déploient des efforts considérables pour améliorer leur situation et il semble bien qu'ils commencent à recueillir les fruits de leurs efforts (cf. par exemple les résultats de TIMSS pour la population 1 (9 ans)).

4.3. Formation des enseignants

Des différences importantes se manifestent clairement d'un pays à l'autre ne serait-ce que par le fait que la formation de base peut s'effectuer dans des universités spécialisées dans la formation des enseignants, ou qu'elle peut s'effectuer dans des universités ouvertes à tous, ou dans d'autres types d'établissements plus ou moins spécialisés.

4.4. Principaux objectifs de l'enseignement des mathématiques

La structure retenue pour aborder la question des objectifs est synthétisée dans le tableau ci-dessous.

Compétences générales	Monde mathématique	Applications des mathématiques
Algorithmes Raisonnement, déduction, preuve Langage et symboles (utiliser, créer, communiquer, ...) "Visual thinking" Transfert <i>Intérêt pour les mathématiques, assurance dans leur utilisation.</i>	<i>Arithmétique</i> <i>Variables, équations</i> <i>Géométrie</i> <i>Gestion de données</i> <i>Fonctions et graphiques</i>	Modéliser Chercher, investiguer Calculs approchés Utilisation des ordinateurs Contrôle des résultats

Ce tableau illustre le fait que nous ne nous intéressons pas qu'aux seuls contenus (le syllabus) mais aussi, et largement, aux effets de l'enseignement en ce qui concerne les compétences développées.

4.5. Exemples de sujets enseignés

La façon dont certaines questions sont abordées et évaluées dans les différents pays de l'étude fait l'objet de développements dans les présentations nationales. Il s'agit en particulier des thèmes suivants :

- équations du second degré,
- théorème de Pythagore,
- similitude,
- problèmes « concrets »,
- pourcentages,
- sujet optionnel (dans lequel une approche innovante est développée, ou qui fournit des informations complémentaires pertinentes).

En ce qui concerne les innovations particulièrement marquantes dans certains curriculums, plusieurs pays signalent un renouveau d'intérêt pour l'enseignement de la géométrie, et en particulier de la géométrie de l'espace. Cependant une analyse plus fine conduit à constater que sous l'appellation de géométrie, les divers programmes font appel à des choses très diverses : de la notion de « visual thinking » aux Pays-Bas (notion qui ne semble pas avoir d'équivalent en français), aux calculs des volumes pour des usages pratiques dans d'autres pays. La géométrie euclidienne traditionnelle se trouve marginalisée dans les programmes de presque tous les pays. Elle reste présente de façon substantielle en Grèce, en Italie, et en France.

D'autres pays pointent l'innovation plutôt sur les statistiques et les probabilités.

Dans d'autres encore, l'accent est porté sur l'utilisation pratique des mathématiques dans des contextes a priori extérieurs aux mathématiques. Parfois se manifeste dans certains pays un intérêt croissant pour intégrer aux programmes officiels des éléments d'histoire des mathématiques.

5. Réflexions générales sur les mathématiques et leur enseignement

Les implications de ce qui vient d'être résumé sont particulièrement pertinentes pour les mathématiques et cela sous divers aspects.

Ainsi, il semble nécessaire de repenser l'échelle des valeurs des connaissances mathématiques. Par exemple, la maîtrise des techniques traditionnelles de calcul est moins utile que jadis, en raison de l'existence et de l'utilisation de calculatrices électroniques ou d'ordinateurs munis de logiciels appropriés. En échange, la capacité d'élaborer un programme de calcul est devenue plus importante, comme l'est celle du contrôle des résultats. De même, des connaissances au moins élémentaires dans le domaine des statistiques et des probabilités, sont désormais indispensables pour tous les futurs citoyens.

Dans un tout autre registre, il peut se révéler utile de s'interroger sur les procédures de vérification des connaissances. Le seul recours aux travaux écrits (et, qui plus est, parfois proposés sous la seule forme de questions à choix multiples) ne semble pas permettre de promouvoir et d'évaluer certains types de compétences telles que la capacité à s'exprimer correctement, la capacité de mathématiser une situation non encore formalisée, la capacité à travailler en groupe sur un projet, la capacité de consulter des livres ou des manuels scolaires de façon autonome, etc.

D'autres réflexions de ce genre ont été l'objet d'une attention particulière de la part des membres du Groupe de travail, et sont résumées ci-dessous.

5.1. Conceptions d'enseignement et d'apprentissage

Il n'est pas du tout évident de donner une image fidèle des conceptions d'enseignement et d'apprentissage dans les différents pays Européens. Nous allons essayer de le faire en nous appuyant sur les informations prises dans les curriculums, les manuels, les examens et tirées de caractéristiques culturelles. Ces remarques sont souvent approfondies dans les présentations nationales.

Aujourd'hui, les conceptions d'enseignement et d'apprentissage de mathématiques sont très variées selon les pays, et elles évoluent rapidement. Ces conceptions se manifestent par les réformes prévues ou (en partie) réalisées. Ce sont toujours deux conceptions de base qui sont

au centre de ces changements : la conception traditionnelle, ce qui veut dire que le professeur fait un cours devant la classe, et la conception plus novatrice - appelée « constructiviste » - centrée sur l'activité de l'élève considéré comme acteur dans la construction des notions mathématiques. Toutes les réformes prévues ou réalisées vont dans le même sens : abandonner le cours magistral et encourager un enseignement construit sur davantage d'activités.

Mais comme c'est souvent le cas dans un processus destiné à concilier deux conceptions différentes, on n'est pas surpris de constater des contradictions entre d'une part les objectifs affichés par les curriculums et les contenus des manuels et des examens et, d'autre part, les résultats finalement obtenus (en termes de connaissances et de compétences chez les élèves).

Au delà de ces contradictions naturelles (!) on peut différencier les pays qui pensent à réformer leurs conceptions (la Grèce, le Luxembourg, la Hongrie, la Russie, le Portugal, ...) de ceux qui ont déjà largement amorcé le changement (la Suède, la Belgique, la France, l'Italie, l'Angleterre, ...). Il est difficile de préciser davantage, d'autant plus qu'il y a des pays où la structure fédérale rend les réformes encore plus compliquées (en Allemagne, ou en Suisse, ...). Certains pays donnent une priorité aux « mathématiques pour tous », comme la Suède ou l'Angleterre, tandis que d'autres se préoccupent des niveaux plus élevés, comme la France et la Russie.

Pour insister sur la difficulté qu'il y a à comparer les différentes conceptions en présence, on peut noter par exemple que :

- dans certains pays (en Luxembourg, en Grèce, ...), les manuels sont imposés par une autorité chargée de l'éducation ; parfois il n'y a qu'un seul manuel autorisé, ce qui peut avoir un effet d'uniformisation ;
- l'importance exagérée des examens, comme le baccalauréat en France, peut conduire à une sorte de "bachotage" dans lequel la solidité de la construction des connaissances mathématiques n'est pas assurée ;
- l'application des réformes peut être facilitée ou, selon le cas, perturbée par la façon dont sont organisées les formations initiales et continues des enseignants : en Belgique francophone par exemple, la plupart de ces formations sont assurées par des professeurs enseignant à mi-temps ou plein-temps dans les écoles, et qui ont donc un contact régulier avec les élèves, ce qui facilite beaucoup la diffusion des réformes actuelles.

Enfin, il est intéressant de noter que divers types de compétitions (toutes sortes d'olympiades, de concours, de jeux; ... en Hongrie, en Suisse ou en France, ...) ont un effet favorable sur les conceptions relatives à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques en apportant un sentiment de plaisir dans la résolution des problèmes.

À tout ce qui précède s'ajoute le problème délicat de la formation des enseignants, non seulement en ce qui concerne l'acquisition de nouveaux contenus, mais surtout de nouvelles méthodes d'enseignement qui sont nécessaires pour faire face à un public scolaire dont les

intérêts et les capacités sont extrêmement variés, ou encore, pour gérer de façon efficace les nouvelles technologies informatiques.

5.2. La didactique des mathématiques comme discipline scientifique

La didactique des mathématiques considérée comme une discipline scientifique connaît un sort très variable selon les pays d'Europe. La situation peut aller de la presque non-existence de la didactique des mathématiques à sa considération comme une discipline scientifique « toute faite » (comme c'est par exemple le cas en France). Certains pays sont en train de faire accepter la didactique comme discipline : c'est le cas des pays où il n'y a pas encore d'instituts universitaires de didactique, mais où l'on développe au moins des éléments de cette discipline. Par exemple, en Suède aujourd'hui, ce domaine est « en voie de développement » et rencontre un grand intérêt : des chercheurs forment des groupes de travail qui s'impliquent dans des recherches sur la didactique des mathématiques.

Les caractéristiques les plus remarquables de la prise en compte de la didactique des mathématiques comme une discipline scientifique sont les enseignements et les chaires de didactique de mathématiques développées au sein des départements de mathématiques et/ou d'éducation des universités, les revues de didactique des mathématiques, les conférences (nationales) et/ou les universités d'été et/ou la possibilité de poursuivre des études de troisième cycle de didactique de mathématiques.

Donnons juste quelques exemples concrets des situations ainsi évoquées. En Allemagne, on compte 100 chaires de didactique des mathématiques de troisième cycle. Les revues « Recherche en Didactique des Mathématiques » et « Journal für Mathematikdidaktik » sont toutes les deux d'excellentes revues scientifiques de référence sur la didactique des mathématiques. L'Italie et le Portugal ont des conférences et séminaires nationaux importants, tandis qu'en France, l'École d'Été de Didactique des Mathématiques a une très bonne réputation internationale. Ces caractéristiques ne veulent pas dire que ces pays ont une conception homogène de la didactique des mathématiques. Une didactique des mathématiques réduite à sa version intuitive et non basée sur la recherche, s'installe parfois un peu trop facilement ici ou là.

Notre description suggère que l'organisation d'un Comité Européen de Recherches sur la Didactique des Mathématiques est souhaitable. La revue « Educational Studies in Mathematics » (revue internationale publiée aux Pays-Bas) montre que la communication et la coopération en didactique sont possibles et enrichissantes. La fondation de la société « European Research in Mathematics Education (ERME) » peut être vue comme un premier pas dans cette direction.

5.3. Heuristique, preuve et démonstration

De manière générale, il semble qu'il soit important pour tous les citoyens de pouvoir raisonner de façon autonome et correcte, dans des situations problématiques complexes, et donc, de savoir utiliser des modes de raisonnement hypothético-déductif. Mais en même temps, il ne semble pas que l'approche de la démonstration mathématique dans sa forme traditionnelle puisse être proposée dans le cadre d'une scolarité de masse. De toutes façons, les compétences acquises dans ce cadre ne semblent pas transférables facilement à d'autres situations culturelles ou de travail. De telles réflexions, banales ou contradictoires, méritent quelques éclaircissements.

Beaucoup de mots sont utilisés comme s'ils étaient les synonymes du mot « preuve » (les mots « démonstration », « justification », « raisonnement », « explication » par exemple), mais de telles expressions n'ont pas un sens clair. En effet dans beaucoup de pays, « justification », « raisonnement » et « explication » sont utilisés d'une manière subjective, sans qu'un emploi à peu près correct de ces mots soit privilégié. Ils se réfèrent plutôt aux démarches informelles reflétant les idées personnelles des élèves. Bien que l'implication des élèves soit un facteur important dans le processus d'apprentissage, on ne s'occupera ici que des types d'approches qui sont à la disposition de l'enseignant et qui peuvent être éventuellement encouragés par le curriculum. Il est alors possible de distinguer l'approche « preuve » et l'approche « heuristique ».

Nous restreignons l'utilisation du mot « preuve » à la désignation d'une argumentation précise et déductive dans un cadre local de connaissances implicites ou explicites bien délimité. A l'école, une preuve est donc toujours formellement incomplète puisque le cadre des connaissances sous-jacentes va contenir des aspects qui ne peuvent pas être donnés explicitement à un niveau élémentaire (comme les notions "entre" (entre deux points) et celle de "complétude" en géométrie euclidienne). Malgré cette restriction, une preuve doit toujours respecter :

- l'utilisation des règles strictes de la déduction,
- l'interdépendance logique entre les définitions, les axiomes (éventuellement implicites) et la hiérarchie des propositions précédentes dans le cadre local en question.

Nous utilisons le mot « heuristique » pour désigner des explications mathématiques de type informel, voire opportuniste. Une justification heuristique est placée - au moins en partie - hors de tout cadre local déductif, et déclaré auparavant, mais peut très bien s'appuyer sur les expériences précédentes des élèves. En d'autres termes, l'approche heuristique :

- exploite des connaissances significatives et pertinentes du domaine des mathématiques, de la physique, ou autres...,
- aide les élèves d'un certain âge à comprendre une nouvelle idée et à réaliser le lien de cette idée avec d'autres qui lui sont déjà familières,

- évoque des explications qui sont correctes « dans leur principe », c'est-à-dire qui sont susceptibles d'être rendues correctes à un niveau plus élevé (de préférence le plus tôt possible).

En étant bien présentée, une analogie pourra donc cacher un isomorphisme et satisfaire les trois critères précédents. Cependant, la plupart des analogies ne respectent pas une ou plusieurs de ces conditions.

Un cas particulier, ou une illustration, peut constituer un élément d'une justification heuristique s'il est, d'une certaine façon, paradigmatique ou générique. Mais bien souvent un résultat général est déduit d'un ou deux cas particuliers sans que ceux qui manipulent ainsi ce type d'inférence soient bien conscients de la différence existant entre un cas paradigmatique et un cas produit par le hasard.

En général, une vérification expérimentale ne devrait pas être qualifiée d'« heuristique » : c'est le cas, par exemple, lorsque les enfants déchirent les coins d'un triangle et les mettent l'un à côté de l'autre pour montrer que la somme des angles est égale à deux angles droits. Toutefois, une telle preuve peut être structurée d'une manière heuristique, lorsque les sommets A, B, C du triangle sont pliés d'une manière à ce qu'ils coïncident au point L de la hauteur AL, puisque cette démarche préfigure la véritable démonstration avec la parallèle à BC menée au sommet A.

La plupart des pays d'Europe déclarent que « la preuve » commence à l'âge de 14-15 ans. La plupart des pays constatent également que cet aspect des mathématiques se manifeste surtout dans le domaine de la géométrie formelle. Néanmoins, lorsqu'ils sont incités à le faire, plusieurs pays reconnaissent que des moments significatifs de déduction se produisent dans d'autres domaines que la géométrie (et plus tôt) et dans un contexte, lié au curriculum, moins contraint.

Par exemple :

- dans les constructions à la règle et au compas,
- dans les applications du fait que « si a et b sont des nombres réels et si le produit $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$ »,
- dans les problèmes avec les nombres premiers et les factorisations en facteurs premiers, etc.

Concernant la preuve formelle – ou démonstration - en géométrie, la plupart des pays d'Europe signalent que la démarche générale de preuve (et le rituel qu'elle occasionne) n'est souvent pas comprise par la majorité des élèves. Pourtant, une partie de ces élèves réussissent à reproduire les preuves classiques et à résoudre, au moins de façon rituelle, des problèmes sollicitant de telles preuves.

Cette observation doit être mise en rapport avec le fait que beaucoup d'élèves trouvent justement les mathématiques intéressantes à cause des dépendances logiques existant entre leurs divers aspects. Cela signifie qu'au cours du développement de ses connaissances, l'élève peut réorganiser son savoir mathématique de façon à mettre en évidence la simplicité et l'interdépendance de l'ensemble, tout cela sans s'appuyer sur une mémorisation importante.

Cela suggère aussi que, même si le rituel de l'approche axiomatique globale n'est apprécié que par peu d'élèves à 16 ans ou avant, l'insistance sur la preuve et sur les connections logiques entre les différentes questions étudiées peut jouer un rôle important au niveau secondaire.

Mais cela pose encore la question de savoir si ce bénéfice secondaire peut être obtenu sans passer par le fardeau de la démarche axiomatique (ou du moins hypothético-déductive) rituelle ? La réponse n'est pas évidente. Notons en effet que beaucoup de pays qui ont totalement abandonné l'approche hypothético-déductive (en n'enseignant ni la géométrie euclidienne traditionnelle, ni d'autres substituts pédagogiques) ont maintenant le sentiment d'avoir « jeté le bébé avec l'eau du bain ».

Ainsi, même si le rituel sous-jacent est mal compris, il est possible qu'il puisse contribuer, d'une façon elle-même mal comprise, à faire sentir à l'élève l'unité globale des mathématiques scolaires, d'une façon qui demande à être prise en compte lorsqu'il s'agit d'explorer des approches alternatives.

Ce qui semble acquis - du moins provisoirement - c'est que :

- le niveau de rigueur utilisé dans les activités de justification peut varier selon les parties du curriculum concernées,
- le cadre local des connaissances impliquées, dans lequel ce raisonnement se déroule, est structuré d'une façon plus précise dans certains domaines que dans d'autres,
- même si on met à part ces pays où l'on a redéfini les mathématiques comme étant une discipline expérimentale, on voit qu'il y a une tendance assez forte à préférer les raisonnements heuristiques aux preuves formelles.

Toutes ces réflexions n'épuisent évidemment pas le sujet, et suggèrent encore beaucoup d'autres questions intéressantes. Par exemple :

- Quels sont les avantages et les inconvénients de cette tendance à préférer les raisonnements heuristiques aux preuves formelles ? Quels sont les critères à respecter pour profiter des avantages et éviter les inconvénients de cette tendance ?
- Jusqu'où peut-on aller dans cette voie sans détruire l'unité des mathématiques scolaires ?
- Comment peut-on s'assurer que les professeurs soient conscients des conditions nécessaires à la qualité d'une approche heuristique ?
- Comment peut-on aussi s'assurer que les élèves réalisent les différences existant entre une « preuve » expérimentale, un raisonnement heuristique et une preuve mathématique ?

5.4. Rapports entre les mathématiques et l'informatique

Faut-il relier l'enseignement traditionnel des mathématiques à celui de l'informatique ? Quel type de mathématiques peut-il faciliter l'apprentissage de l'informatique, et de quelle

informatique ? Et *vice-versa*, quels sont les environnements informatiques susceptibles de favoriser l'apprentissage des mathématiques ?

Il s'agit là de quelques questions fondamentales. Les conditions d'enseignement des mathématiques sont en cours de bouleversements sans que soient toujours maîtrisées les raisons ni les effets de ces bouleversements. Mais il y a peu de doute que l'apparition des nouvelles technologies de calcul soit une des causes de ces bouleversements.

Dans tous les pays, on signale une incitation forte à la banalisation des nouvelles technologies, non seulement les calculatrices scientifiques, mais aussi les calculatrices à écran graphique, les ordinateurs et Internet. Internet n'est évidemment pas de même nature que les autres outils évoqués, mais l'élève y trouve maintenant outre des bases de données, des simulations de tous types, et un environnement suffisamment interactif pour que la différence avec les autres outils ne soit presque plus visible (ne serait-ce que parce que l'interface avec l'utilisateur reste en général un écran d'ordinateur).

Ceci dit, l'utilisation et la place des calculatrices et des ordinateurs dans le curriculum varient considérablement :

- en ce qui concerne la place accordée aux moyens de calcul électronique dans les classes et aux examens,
- en ce qui concerne les relations existantes entre l'enseignement des mathématiques et l'enseignement de l'informatique,
- en ce qui concerne l'intégration des calculatrices et des ordinateurs, et plus généralement des instruments modernes d'information et de communication, à l'enseignement des mathématiques.

5.4.1. La place des nouvelles technologies dans les classes et aux examens

Nous n'insisterons pas sur la question des calculatrices simples : leur utilisation s'est banalisée dès l'école élémentaire et concerne donc peu les élèves de 16 ans. La calculatrice scientifique est partout acceptée au niveau des classes. Pour les élèves de 16 ans, la calculatrice à écran graphique fait son entrée systématique et, de ce fait, l'étude des fonctions par exemple s'en trouve considérablement modifiée. Pour les calculatrices graphiques, programmables, et aussi munies de fonctions de calcul formel, la tendance est donc en général à favoriser leur utilisation dans l'enseignement. Cela est vrai dans tous les pays au niveau de l'incitation, mais non au niveau des réalisations. La possession d'un appareil de ce type n'est pas universellement répandue et peut même varier dans un même pays selon les établissements et aussi, selon les niveaux d'approfondissement de l'enseignement des mathématiques (séries à mathématiques fortes, séries à mathématiques faibles).

Il n'y a pas pour autant de formation systématique à l'utilisation de ces outils. Les enseignants se plaignent alors d'une baisse des compétences des élèves dans le domaine de la gestion mentale des données numériques (il ne s'agit pas ici du calcul mental traditionnel, mais plutôt d'habiletés nécessaires pour traiter des calculs, y compris lorsqu'on dispose d'une calculatrice).

La politique relative à l'utilisation des calculatrices pendant les examens est variable. Certains pays continuent à en interdire systématiquement l'usage, tandis que d'autres le rendent quasi obligatoire, ne serait-ce que par la forme que prennent leurs épreuves d'examen. Par exemple le ministère français vient de publier une circulaire interdisant... d'interdire l'utilisation des outils de calculs modernes dans tous les examens dépendant de lui. Dans certains pays, les enseignants sont obligés de prévoir deux approches d'un même problème et deux méthodes de résolution : l'une avec calculatrice, l'autre sans.

L'une des difficultés rencontrées par les enseignants est la grande diversité des matériels utilisés par les élèves. De ce fait, il est difficile d'organiser des situations d'apprentissage systématique de l'outil. L'utilisation de la calculatrice est alors laissée à l'initiative de l'élève et n'est pas vraiment intégrée à l'enseignement. Profitons-en pour préciser que nous avons utilisé dans ce rapport, de façon différenciée les termes de calculatrice et d'ordinateur. Cela a encore un sens dans certains pays, mais il est clair que, d'une façon générale il n'y a plus lieu de faire la différence. La différence qui s'impose maintenant est celle de l'autonomie ou de la non-autonomie des matériels.

L'équipement des établissements en ordinateurs est très inégale. Dans certains pays tels les Pays-Bas et la France, les normes officielles d'équipement sont descendues à 1 ordinateur pour 8 ou 10 élèves.

Mais, même dans ces pays, l'équipement réel est en retard sur les recommandations. De plus, les enseignants se plaignent du manque de logiciels utiles pour l'enseignement des mathématiques. Aux Pays-Bas, la majorité des enseignants de mathématiques n'utilisent l'ordinateur pendant leurs cours moins de 4 fois par an. La situation ne doit pas être très différente en France et doit être encore moins favorable dans la plupart des autres pays.

Par exemple, alors que des logiciels de géométrie dynamique et de calcul formel sont disponibles, il est signalé que leur utilisation est quasi anecdotique en Allemagne. Là encore, la situation semble être semblable ou moins favorable dans la plupart des autres pays.

5.4.2. Les relations entre l'enseignement des mathématiques et l'enseignement de l'informatique

Sur ce point, on constate que des rééquilibrages se font, en terme d'horaire d'enseignement, au bénéfice de l'informatique.

Dans certains cas, les enseignants sont recrutés comme enseignants de mathématiques et d'informatique, ce qui permet éventuellement d'assurer un minimum de coordination entre les deux disciplines. Dans d'autres cas ce sont des enseignants d'informatique, ou éventuellement de technologie, qui assurent un enseignement indépendant de celui des mathématiques.

Mais le choix n'est pas toujours clair entre l'informatique au service des apprentissages traditionnels ou une informatique intégrée à l'enseignement des mathématiques.

Parfois, les enseignants se plaignent de la pauvreté des logiciels d'enseignement assisté par ordinateurs et autres didacticiels. De telles aides existent cependant, mais leur accès au sein des établissements scolaires est largement limité par l'insuffisance des ordinateurs disponibles.

Dans bien des cas, ces aides sont utilisés pour la remise à niveau d'élèves en difficulté et sont utilisés en d'autres lieux que la salle de classe - les centres de documentation par exemple - ou dans des espaces mis à la disposition des élèves en dehors des établissements - par les associations de parents, par exemple - et enfin, à domicile ou dans des établissements assurant des cours parallèles à ceux des établissements officiels, pour les plus fortunés.

5.4.3. L'intégration des calculatrices et des ordinateurs dans l'enseignement des mathématiques

L'intégration de l'informatique à l'enseignement des mathématiques est vécu de manière assez différente. Ici, ce sont les concepts eux-mêmes qui, gardant la trace de leur condition d'apprentissage, s'en trouvent modifiés d'un point de vue épistémologique.

On sait depuis longtemps que la notion de variable en informatique n'est pas identique au concept-clé de variable en mathématiques. L'utilisation d'un tableur en mathématique pour organiser et traiter des calculs algébriques ne manque pas de conférer un sens nouveau à la notion de variable. Est-ce à dire que cela soit néfaste à l'apprentissage des mathématiques ? Nous ne le pensons pas, mais il nous paraît important de souligner ce type de glissement de sens qui peut aussi expliquer les réticences parfois non explicitées des enseignants pour intégrer l'informatique à leur enseignement.

Le même type de remarque peut être fait avec les logiciels de géométrie dynamique (tel Cabri) où, par exemple un point sur une droite n'est plus tout à fait un point au sens de la géométrie traditionnelle : il peut être attaché à la droite (et c'est alors un point au sens traditionnel, c'est-à-dire un élément fixe de la droite), mais il peut être libre sur cette droite (il a alors un degré de liberté et l'on est en quelque sorte déjà en mécanique, si du moins on tient à garder le langage traditionnel). Mais ce n'est là qu'un exemple.

Enfin, l'arrivée sur le marché de logiciels de calcul formel, implantés sur des machines du type calculatrice est en train de bouleverser les conditions d'apprentissage du calcul algébrique. On retrouve au niveau des élèves de 16 ans et un peu avant, les problèmes qu'ont posé, et que posent encore, la concurrence de la machine au moment des premiers apprentissages du calcul.

Pour achever au moins provisoirement ce tour d'horizon des rapports entre les mathématiques et l'informatique, il faut signaler que, partout, les enseignants et les spécialistes de l'enseignement des mathématiques s'interrogent sur les effets réels de ces nouvelles pratiques et de ces nouveaux outils sur les apprentissages. Cependant, l'existence de travaux de recherche très importants et prometteurs dans ce domaine, ainsi que l'accent mis sur les démarches innovantes dans les documents officiels et les congrès divers, ne doivent pas masquer l'impact encore très faible de ces outils sur la majorité des pratiques.

6. Perspectives et conclusions

Proposer des niveaux de référence en mathématiques à 16 ans pour l'ensemble européen suppose déjà que les conditions de l'enseignement de cette discipline soient connues et reconnues. L'étude a largement permis de progresser dans cette voie.

Cela suppose encore que des conceptions sur l'enseignement et l'apprentissage soient partagées entre les partenaires concernés ainsi que des conceptions sur la nature des mathématiques enseignées et sur les enjeux de leur enseignement.

L'étude a permis de faire un pas significatif dans cette seconde direction. La communication, l'échange et le dialogue ont pu s'établir au sein d'un réseau de mathématiciens soucieux de faire progresser l'enseignement de leur discipline, tout en respectant les particularités locales.

Ce qui est proposé avec ce rapport est un instrument pour la communication et de dialogue avec et entre les enseignants de mathématiques, avec les formateurs d'enseignants et avec les responsables des systèmes d'enseignement.

Il reste beaucoup à faire pour compléter le travail de notre groupe et le rendre opérationnel, de même qu'il reste beaucoup à faire pour en assurer la diffusion aux différents niveaux.

Pour que la mobilité puisse être effective au sein de l'Espace Européen, en ce qui concerne au moins le domaine concerné par les mathématiques il reste évidemment un travail important à faire.

L'embryon de centre de ressources sur les curriculums et l'évaluation en mathématiques que nous avons mis en place mériterait d'être développé et mis à jour de façon continue, de même que le site Internet qui lui est associé.

Il serait aussi important de prolonger l'étude au niveau des 18 ans, c'est-à-dire au niveau de la transition secondaire post-secondaire.

Les différents rapports issus de l'étude, ainsi que d'autres documents sur l'enseignement des mathématiques en Europe peuvent être consultés et téléchargés à partir de notre site Internet :

<http://www-math.univ-fcomte.fr/DEPARTEMENT/CTU/IREM/internat.htm>

7. Références

Balacheff, N. & Kaput, J.J.: 1996, 'Computer-Based Learning Environments in Mathematics'. In *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academics Publishers. 469 - 504

Beaton, A. & al. : 1998, *Mathematics and Science Achievement in the Final Year of Secondary School : IEA's Third International Mathematics and Science Study*. TIMSS International Study Center, Boston College.

- Bodin A.: 1993, 'What does to assess mean', Investigations into Assessment in Mathematics Education, An ICMI Study (ed Mogens NISS) - Kluwer Academic Publishers - Dordrecht
- Bodin, A : 2000, *Vers des niveaux de référence en mathématiques, pour les pays de la Communauté Européenne*, Bulletin de l'APMEP, N°426, pp 61-77
- Bodin, A : 1998, Reference Levels in Mathematics *for European Union Countries (On the Web site)*
- Burton, L. : 1994, Who counts ? Assessing Mathematics in Europe, Trentham books, London
- Delors, J. & al. : 1996, *L'éducation, un trésor est caché dedans*. Rapport à l'UNESCO de la commission internationale sur l'éducation pour le vingt et unième siècle. Editions Odile Jacob, Paris
- Educational Testing Service (1989) : *A world of differences - An international assesment of mathematics and science*.
- Educational Testing Service (1991) : *Learning Mathematics*. (rapport de IAEP 2 - Second International assessment of Educational Progress)
- Howson G.: 1991, *National Curricula in Mathematics* , The Mathematical Association of England, Leicester
- Jaworski, B & Phillips, D. (ed) : 1999, *Comparing Standards Internationally, research and pratices in mathemàtics and beyond*, Symposium Books, Cambridge University Press
- Legrand, P. : 1993, *Les examens en Europe*, rapport au ministre de l'Education nationale.
- Legrand, P. : 1994, *Les examens en Europe, aux Etats-Unis et au Japon*, rapport au ministre de l'Education nationale.
- OECD - OCDE, : 1992, *L'OCDE et les indicateurs internationaux de l'enseignement. Un cadre d'analyse*. Paris
- OECD - OCDE, 1998, *Regards sur l'éducation : les indicateurs de l'OCDE*.
- Rouche, N. : 1995, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM, Nivelles, Belgique.
- Ruthven, K.: 1996, 'Calculators in Mathematics Curriculum, the scope of Personal Computational Technology'. In *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academics Publishers, 435 - 468
- Schmidt, W.: 1996, *Many visions, many aims - A Cross-National Investigation of Curricular Intentions*, Volume 1 - Mathematics. Rapport de l'analyse des curricula de la Troisième Etude Internationale sur l'Enseignement ds Mathématiques et des Sciences, TIMSS de l'IEA, Kluwer Academics Publishers.
- Travers K. J. & Westbury I : 1989, *The IEA Study of Mathematics I, Analysis of Mathematics Curricula.*, Pergamon Press. Oxford
- OECD - OCDE (1995), *Public expectation of the final stage of compulsory education - Le dernier cycle de l'enseignement obligatoire : quelle attente*. (deux langues mais non bilingue)
- OECD - OCDE (1995) : *Measuring what students learn - Mesurer les résultats scolaires*.